2/5/2018

Άσκηση $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / H$, με $H = \langle [0]_4, [1]_6 \rangle$

Λύση: Έχω ότι: $H = \{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(0,5)\}$.

• **Δείκτης**: $[\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 : H] = \frac{|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6|}{|H|} = \frac{24}{6} = \boxed{4}$.

• **Σύμπλοκα**:

(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)
(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)
(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)
(0,3)	(1,3)	(2,3)	(3,3)
(0,4)	(1,4)	(2,4)	(3,4)
(0,5)	(1,5)	(2,5)	(3,5)
$(0,0)+H$	$(1,0)+H$	$(2,0)+H$	$(3,0)+H$

⚠ Δύο σύμπλοκα είτε θα ταυτίζονται, είτε θα είναι ξένα μεταξύ τους.

• $\mathrm{ord}((0,0)+H) = 1$, $\mathrm{ord}((1,0)+H) = ;$

$((1,0)+H)+((1,0)+H) = ((1,0)+(1,0))+H = (2,0)+H$

• Από Θ.Lagrange: $\mathrm{ord}((1,0)+H) \mid |\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / H| = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{ord}((1,0)+H) = 4}$

• Αντίστοιχα: $\boxed{\mathrm{ord}((2,0)+H) = 2}$ & $\boxed{\mathrm{ord}((3,0)+H) = 4}$

• **Άρα**: $\boxed{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 / H = \langle (1,0)+H \rangle \cong \mathbb{Z}_4}$

▶ S_n ομάδα μεταθέσεων

- Η S_n, έχει στοιχεία της μορφής:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- $\mathrm{ord}(S_n) = |S_n| = \underline{n!}$ ($n!$ πλήθος μεταθέσεις $\sigma \in S_n$)

▶ Ορισμός Έστω $\sigma \in S_n$ και $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Λέμε ότι: $a \sim_\sigma b$, αν $b = \sigma^k(a)$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$

▶ Παράδειγμα $S_8 \ni \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

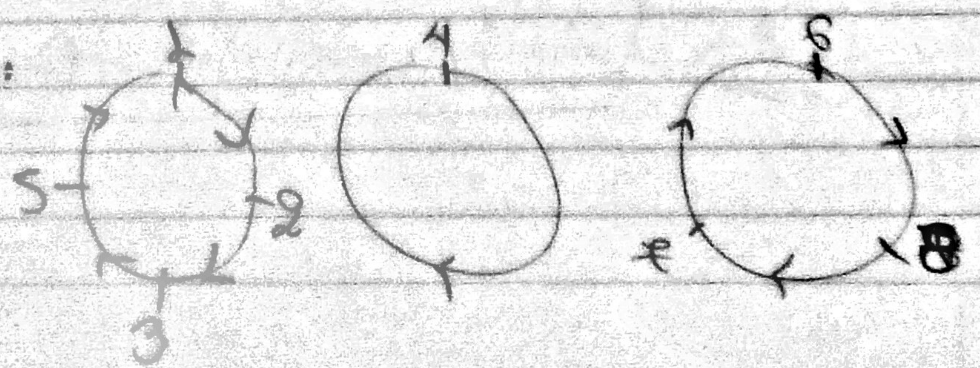
- Έχω:
  - $1 \sim 1$, καθώς: $1 = \sigma^0(1)$
  - $2 \sim 1$, καθώς: $2 = \sigma(1)$
  - $3 \sim 1$, καθώς: $3 = \sigma^2(1)$
  - $5 \sim 1$, καθώς: $5 = \sigma^3(1)$

  Άρα $\boxed{1 \sim 1, 2, 3, 5}$

- Επίσης: $\boxed{4 \sim 4}$ και
  - $6 \sim 8$, καθώς $8 = \sigma(6)$
  - $6 \sim 7$, καθώς $7 = \sigma^2(6)$
  - $6 \sim 6$, καθώς $6 = \sigma^0(6) = \sigma^3(6)$

  Άρα $\boxed{6 \sim 6, 7, 8}$

- Συνεπώς:



Θεώρημα Η σχέση $\sim_\sigma$ στο $\{1,2,\dots,n\}$ είναι σχέση ισοδυναμίας

Απόδειξη • Έχω $\alpha = \sigma^0(\alpha) \Rightarrow \boxed{\alpha \sim_\sigma \alpha}$

• $\alpha \sim_\sigma b \Rightarrow b = \sigma^k(\alpha) \Rightarrow \alpha = \sigma^{-k}(b) \Rightarrow \boxed{b \sim_\sigma \alpha}$

• $\alpha \sim_\sigma b$ & $b \sim_\sigma \gamma$. Τότε:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \sim_\sigma b \Rightarrow b = \sigma^k(\alpha) \\ b \sim_\sigma \gamma \Rightarrow \gamma = \sigma^\lambda(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma = \sigma^\lambda(\sigma^k(\alpha)) = \sigma^{(k+\lambda)}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \sim_\sigma \gamma}$$

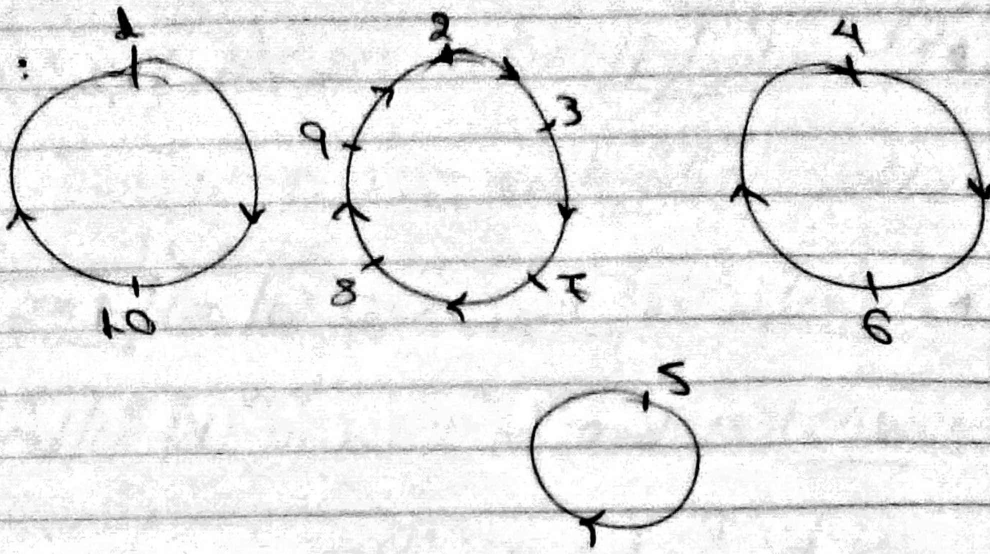
• Άρα, η σχέση $\sim_\sigma$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Άρα $\sim_\sigma$: σχέση ισοδυναμίας

Ορισμός Έστω $\sigma \in S_n$. Οι κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζονται από την σχέση $\sim_\sigma$, ονομάζονται τροχιές της σ.

Παράδειγμα Βρείτε τις τροχιές της $\varphi \in S_{10}$, όπου:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 7 & 6 & 5 & 4 & 8 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

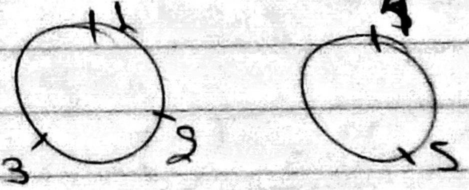
• **Λύση** :



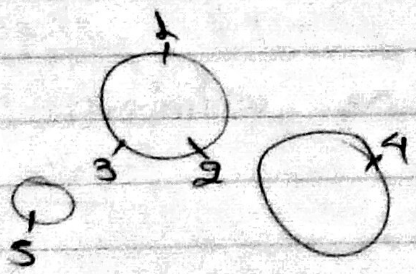
▶ Ορισμός | Μία μετάθεση $\sigma \in S_n$ λέγεται <u>κύκλος</u>, αν έχει το πολύ μία τροχιά, και να περιέχει <u>περισσότερα από ένα</u> στοιχεία

▶ Ορισμός | Το <u>μήκος</u> ενός κύκλου είναι το πλήθος των στοιχείων της μεγαλύτερης τροχιάς

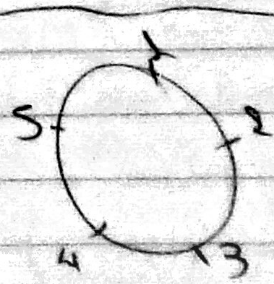
▶ Παραδείγματα | S_5 , • σ_1



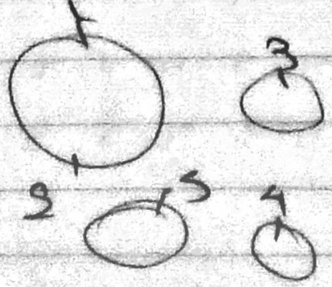
• σ_2



• σ_3



• σ_4



$\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ είναι κύκλοι

Η σ_1 <u>όχι</u>.

• Μήκος της σ_3: 5 ή Η σ_3 είναι 5-κύκλος

• Προφανώς: $ord(\sigma_2)=3$, διότι $1=\sigma^3(1)$, $2=\sigma^3(2)$ & $3=\sigma^3(3)$

Δ Το μήκος ενός κύκλου, ισούται με την τάξη του.

Παράδειγμα $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

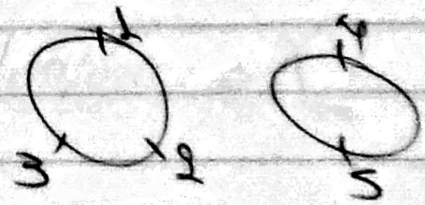
& όχι κύκλος

• Έχω: $\sigma=(1,2,3,4)(5,6,7) =$

$= \underbrace{((1,2,3,4)(5)(6)(7))}_{\text{κύκλος}}\underbrace{((5,6,7)(1)(2)(3)(4))}_{\text{κύκλος}}$

Δ Κάθε μετάθεση γράφεται ως γινόμενο κύκλων ξένων μεταξύ τους

Παράδειγμα $S_5 \ni \sigma_1$:



• Έχω: $ord(\sigma_1) = ΕΚΠ(3,2) = \boxed{6}$.

Δ Η τάξη μιας μετάθεσης, είναι το ΕΚΠ των ξένων κύκλων της!

Παράδειγμα: Βρείτε τις τάξεις των παρακάτω στοιχείων της S_{10}

▶ $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 1 & 4 & 6 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

• Έχω: $\sigma_1 = (1,2,3,5)(4,7,6)(8,9,10)$.

• Συνεπώς: $ord(\sigma_1) = \text{ΕΚΠ}(4,3,3) = \boxed{12}$

▶ $\sigma_2 = (1,3,5,7)(2,4,3) = (1,3,2,4,5,7)$

Άρα: $\boxed{ord(\sigma_2) = 6}$

▶ $\sigma_3 = (2,5,7,9,10,3)(1,4,6)$

$ord(\sigma_3) = \text{ΕΚΠ}(6,3) = \boxed{6}$

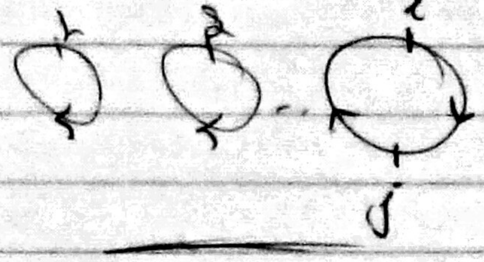
▶ $\sigma_4 = (1,2,3)(3,5,7,4)(2,4,1,3,6)(10,9,8,7,6,3,1,2) =$

$= (1)(2,10,9,8,4)(3,5,7)(6)$

• Άρα: $ord(\sigma_4) = \text{ΕΚΠ}(1,5,3,1) = 15$

$\Rightarrow \boxed{ord(\sigma_4) = 15}$

Ορισμός: Αντιμετάθεση λέγεται ένας κύκλος μήκους $\underline{2}$

• Π.χ. : τ: 

Παράδειγμα: • Αντιμεταθέσεις του S_3:

$(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$

• Αντιμεταθέσεις του S_4 : $(1,2)(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)(3,4)$

Πρόταση: Κάθε κύκλος, αλλά και κάθε μετάθεση γράφεται ως γινόμενο αντιμεταθέσεων

Παράδειγμα: $\sigma=(1,2,3,4,5)=(1,5)(1,4)(1,3)(1,2)$

Παράδειγμα: Γράψτε την μετάθεση:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&6&1&5&7\end{pmatrix}.$$

• Έχω: $\sigma=(1,2,3,4,6,5)(7)=(1,5)(1,6)(1,4)(1,3)(1,2)$